

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЗАДАНИЯ 15, 17 (С1, С3): СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ НЕРАВЕНСТВ

ЭТО НАДО ЗНАТЬ

Определение. Число a называется большим (меньшим) числа b , если разность $a - b$ положительна (отрицательна).

Из определения следует, что любое положительное число больше нуля, а любое отрицательное число меньше нуля, поэтому вместо слов « a — положительное (отрицательное) число» часто употребляется запись « $a > 0$ ($a < 0$)».

Свойства числовых неравенств. Справедливы следующие свойства:

$$a > b \Leftrightarrow b < a, \quad \begin{cases} a > b, \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c, \quad a > b \Leftrightarrow a + c > b + c.$$

Если $c > 0$ и $a > b$, то $ac > bc$.

Если $c < 0$ и $a > b$, $ac < bc$.

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$$

$$\begin{cases} a > b \geq 0 \\ c > d \geq 0 \end{cases} \Rightarrow ac \geq bd$$

$$a^2 + b^2 \geq 2|ab|$$

$$a^2 \pm ab + b^2 \geq 0$$

Если $ab > 0$, то $a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Модуль суммы взаимнообратных чисел не меньше двух: $\left|a + \frac{1}{a}\right| \geq 2$.

Теоремы о знаках. Напомним, что символом $\operatorname{sgn} x$ обозначается знак числа x . Пусть $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$. Тогда на области определения соответствующих функций справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) &= \operatorname{sgn}(x - y), \\ \operatorname{sgn}(|x| - |y|) &= \operatorname{sgn}(x^2 - y^2), \\ \operatorname{sgn}(a^x - a^y) &= \operatorname{sgn}((a - 1)(x - y)), \\ \operatorname{sgn}(\log_a x - \log_a y) &= \operatorname{sgn}((a - 1)(x - y)). \end{aligned}$$

Проиллюстрируем применение теорем о знаках. Решим неравенство

$$\frac{(2^x - 16)(\log_{x-1} x - \log_{x-1} 4)}{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 2})(|x + 1| - |x|)} \leq 0.$$

Запишем соотношения, задающие область определения логарифма и квадратного корня: $x > 1$, $x \neq 2$, $x^2 + x > 0$. Отсюда $x \in (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

На этом множестве имеем:

$$\frac{(2^x - 2^4)(\log_{x-1} x - \log_{x-1} 4)}{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 2})(|x+1| - |x|)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2-1)(x-4)(x-2)(x-4)}{0 \text{ ДЗ } ((x^2 + x) - (x^2 + 2))(x^2 + 2x + 1 - x^2)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-4)^2(x-2)}{(x-2)(2x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)^2}{x \neq 2 \quad 2x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)^2}{2x+1 > 0} \leq 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Методы сравнения чисел. Решение систем или совокупностей неравенств приводит к задаче сравнения чисел. Проиллюстрируем основные используемые для этого идеи примерами.

1. Сравним два иррациональных числа: $\sqrt{26} - \sqrt{6} - \sqrt{2}$ и $\sqrt{35} - \sqrt{17} - \sqrt{5}$.

Первое из чисел положительно, в второе отрицательно. Тем самым, первое больше.

2. Сравним числа $\sqrt{6} - \sqrt{5}$ и $\sqrt{8} - \sqrt{7}$.

Увеличим каждое из чисел на сумму $\sqrt{5} + \sqrt{7}$, тем самым, избавимся от минусов. Получим числа одного знака, имеем право сравнивать их натуральные степени; учитывая то, что оба они положительны, не будем менять знак сравнения. Последовательно получаем:

$$\sqrt{6} - \sqrt{5} \vee \sqrt{8} - \sqrt{7} \Leftrightarrow \sqrt{6} + \sqrt{7} \vee \sqrt{8} + \sqrt{5} \Leftrightarrow (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 \vee (\sqrt{8} + \sqrt{5})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 + 7 + 2\sqrt{42} \vee 8 + 5 + 2\sqrt{40} \Leftrightarrow 13 + 2\sqrt{42} \vee 13 + 2\sqrt{40}.$$

Уменьшим теперь каждое из сравниваемых чисел на 13, а затем уменьшим каждое из полученных чисел в два раза:

$$13 + 2\sqrt{42} \vee 13 + 2\sqrt{40} \Leftrightarrow 2\sqrt{42} \vee 2\sqrt{40} \Leftrightarrow \sqrt{42} \vee \sqrt{40}.$$

Итак, выполнением ряда преобразований мы получили, что знак между исходными числами тот же, что и знак между числами $\sqrt{42}$ и $\sqrt{40}$. Поэтому поскольку $\sqrt{42} > \sqrt{40}$, $\sqrt{6} - \sqrt{5} > \sqrt{8} - \sqrt{7}$, то есть первое число больше.

3. Сравним числа $\sqrt{6} - \sqrt{5}$ и $\sqrt{8} - \sqrt{7}$.

Укажем более простую идею, нежели последовательное возведение в квадрат. Умножая и деля каждое из сравниваемых чисел на сопряженные к ним получаем

$$\sqrt{6} - \sqrt{5} \vee \sqrt{8} - \sqrt{7} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5})}{(\sqrt{6} + \sqrt{5})} \vee \frac{(\sqrt{8} - \sqrt{7})(\sqrt{8} + \sqrt{7})}{(\sqrt{8} + \sqrt{7})} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} \vee \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{7}}.$$

Из двух положительных дробей больше та, знаменатель которой меньше. Но каждое слагаемое знаменателя первой дроби больше соответствующего слагаемого знаменателя второй дроби, откуда ясно, что первое число больше. Задача решена.

4. Сравним числа: $\log_2 3$ и $\log_3 5$.

Идея метода такова: если показать, что одно из сравниваемых чисел больше некоторого подобранного числа, а другое наоборот больше него, то в силу свойства транзитивности неравенств второе число больше первого.

Заметим, что оба числа заданных больше единицы, но меньше двух. Будем подбирать число, которое было бы больше одного из них, но меньше другого. Возьмем, например, $\frac{3}{2}$ и сравним с ним каждое из заданных чисел.

Имеем:

$$\log_2 3 > \frac{3}{2}, \text{ так как } 3 > 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 3^2 > 2^3,$$

$$\log_3 5 < \frac{3}{2}, \text{ так как } 5 < 3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 5^2 < 3^3.$$

Таким образом $\log_2 3 > \log_3 5$.

5. Сравним числа 31^{11} и 17^{14} .

Используем ту же идею. Вместо того, чтобы сравнивать заданные числа друг с другом, сравним каждое из них с числом 16^{14} . Ясно, что $17^{14} > 16^{14}$, в то же время $16^{14} = 2^{56}$, а $2^{56} > 2^{55} = 32^{11} > 31^{11}$. Таким образом $31^{11} < 17^{14}$.

6. Сравним $\sin 11$ и $\sin 10$.

Удобной возможностью сравнивать числа является изучение знака их разности, либо их разности с одним и тем же числом.

Рассмотрим разность заданных чисел:

$$\sin 11 - \sin 10 = 2 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{21}{2}.$$

В силу справедливости неравенств

$$\frac{1}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin \frac{1}{2} > 0,$$

$$\frac{21}{2} \in \left(3\pi; \frac{7\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos \frac{21}{2} < 0$$

получаем, что

$$2 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{21}{2} < 0.$$

тогда $\sin 11 - \sin 10 < 0$, значит, $\sin 10 > \sin 11$.

7. Сравним $\log_{10} 11$ и $\log_{11} 12$.

Оба заданных числа близки к единице. Вычитая 1 из каждого из них, получим числа близкие к нулю, которые более удобны для сравнения:

$$\log_{10} 11 - 1 = \log_{10} 11 - \log_{10} 10 = \log_{10} \frac{11}{10} = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{10}\right),$$

$$\log_{11} 12 - 1 = \log_{11} 12 - \log_{11} 11 = \log_{11} \frac{12}{11} = \log_{11} \left(1 + \frac{1}{11}\right).$$

Замечая, что

$$\log_{10} \left(1 + \frac{1}{10}\right) > \log_{11} \left(1 + \frac{1}{10}\right) > \log_{11} \left(1 + \frac{1}{11}\right),$$

получаем, что первое число больше.